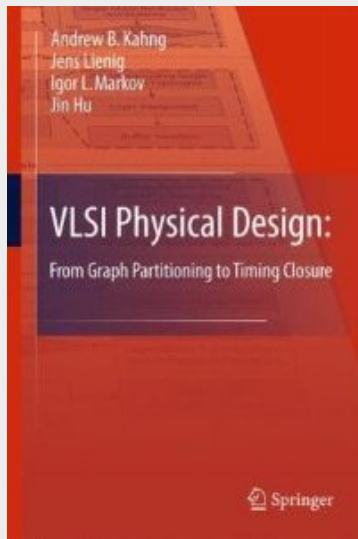


*Физическое Проектирование СБИС:
от Разбиения Графов до Оптимизации Временных Характеристик*

Глава 2 – Разбиение графов с приложениями



Авторы книги:

Andrew B. Kahng, Jens Lienig, Igor L. Markov, Jin Hu

Глава 2 – Разбиение графов с приложениями

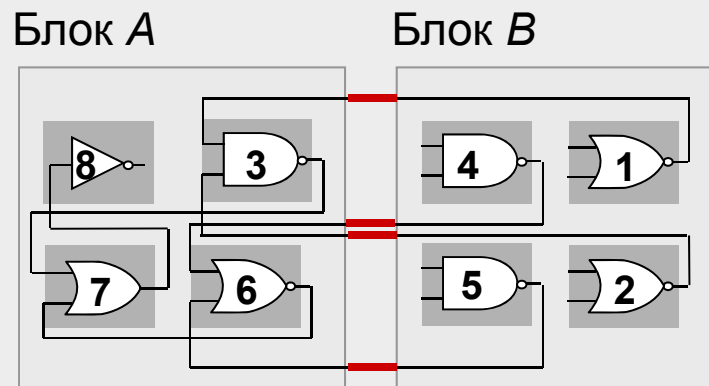
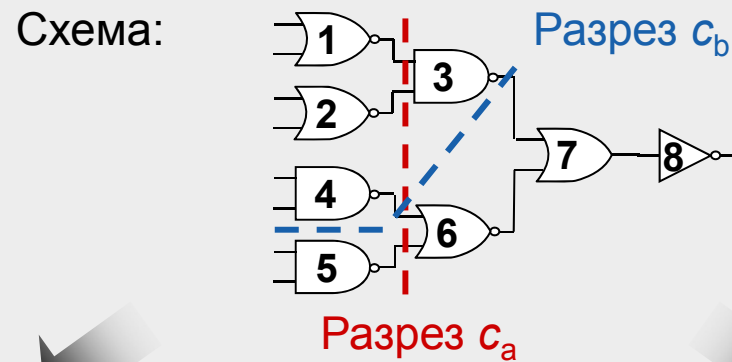
- 2.1 Введение
- 2.2 Терминология
- 2.3 Цели оптимизации
- 2.4 Алгоритмы разбиения (гипер)графов
 - 2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL)
 - 2.4.2 Улучшенные варианты алгоритм Кернигана-Лина
 - 2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM)
- 2.5 Многоуровневые алгоритмы
 - 2.5.1 Кластеризация
 - 2.5.2 Многоуровневое разбиение (гипер)графов
- 2.6 Разбиение систем на несколько кристаллов ПЛИС для эмуляции

1.2

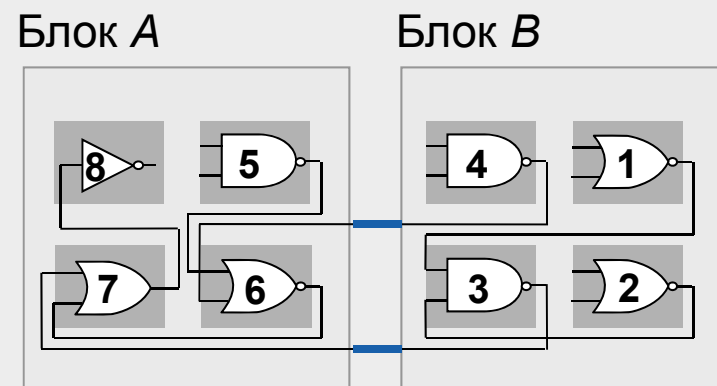
Маршруты проектирования СБИС



2.1 Введение

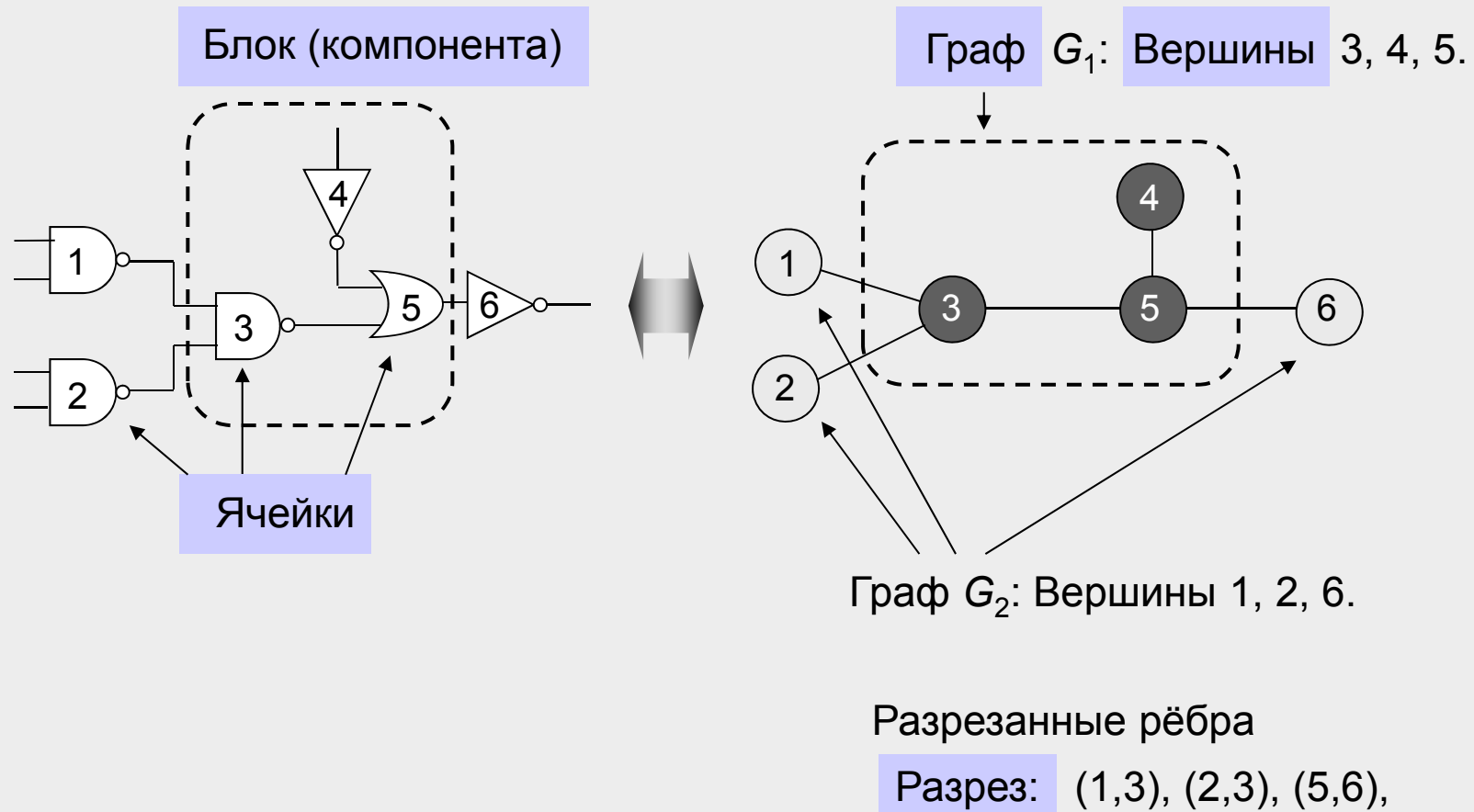


Разрез c_a : четыре внешних соединения



Разрез c_b : два внешних соединения

2.2 Терминология



2.3 Задачи оптимизации

- Дан граф $G(V,E)$ с $|V|$ вершин и $|E|$ рёбер где каждая вершина $v \in V$ и каждое ребро $e \in E$.
- У каждой вершины есть *площадь* $s(v)$ и каждое ребро имеет *стоимость* или *вес* $w(e)$.
- Требуется разбить граф G на k непересекающихся подграфов так чтобы минимизировать данные функции и сохранить отношения инцидентности.

2.3 Задачи оптимизации

- Оптимизируемые функции
 - Количество соединений между всеми компонентами
 - Ограничения на размеры компонент (суммарная площадь, количество соединений)
 - Нарушение баланса размера компонент
- Многие такие задачи NP-трудные
 - Быстрые эвристики были разработаны в 1970s и 1980s. Они позволяют найти неплохие решения важных задач.

2.4 Алгоритмы разбиение (гипер)графов

2.1 Введение

2.2 Терминология

2.3 Задачи оптимизации

→ 2.4 Алгоритмы разбиение (гипер)графов

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL)

2.4.2 Улучшенные варианты алгоритма Кернигана-Лина

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM)

2.5 Многоуровневые алгоритмы

2.5.1 Кластеризация

2.5.2 Многоуровневое разбиение (гипер)графов

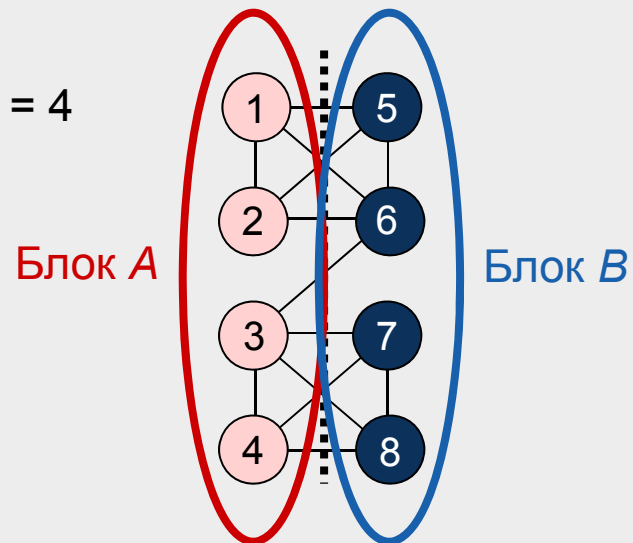
2.6 Разбиение систем на несколько кристаллов ПЛИС для эмуляции

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL)

Даётся: Граф с $2n$ вершинами одинакового веса

Найти: Разбиение графа на два непересекающихся подмножества A и B , $|A| = |B| = n$, с минимальной стоимостью разреза

Пример: $n = 4$



2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - терминология

Стоимость $D(v)$ передвижения вершины v

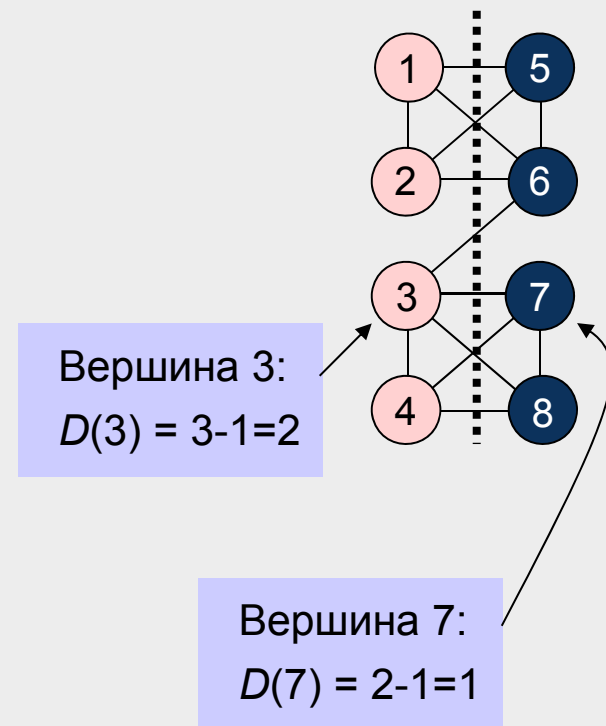
$$D(v) = |E_c(v)| - |E_{nc}(v)| ,$$

где

$E_c(v)$ множество разрезанных рёбер инцидентных к v ,

$E_{nc}(v)$ множество разрезанных рёбер не инцидентных к v .

Вершины с высокой стоимостью ($D > 0$) желательно передвинуть, а вершины с низкой стоимостью ($D < 0$) лучше оставить в той же компоненте.



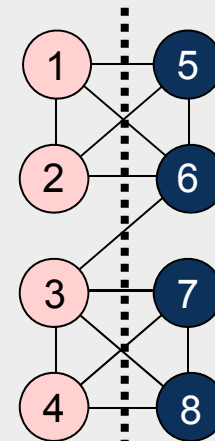
2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - терминология

Прирост связанный с обменом пары вершин a и b

$$\Delta g = D(a) + D(b) - 2 * c(a,b),$$

где

- $D(a)$, $D(b)$ – это стоимости передвижения вершин a , b
- $c(a,b)$ – это вес соединения между a и b :
Если существует ребро между a и b ,
то $c(a,b)$ = вес ребра (например 1),
иначе, $c(a,b) = 0$.



Прирост Δg указывает насколько полезен обмен данных двух вершин

Чем выше прирост Δg , тем сильнее сократится разрез

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - терминология

Прирост связанный с обменом пары вершин a и b

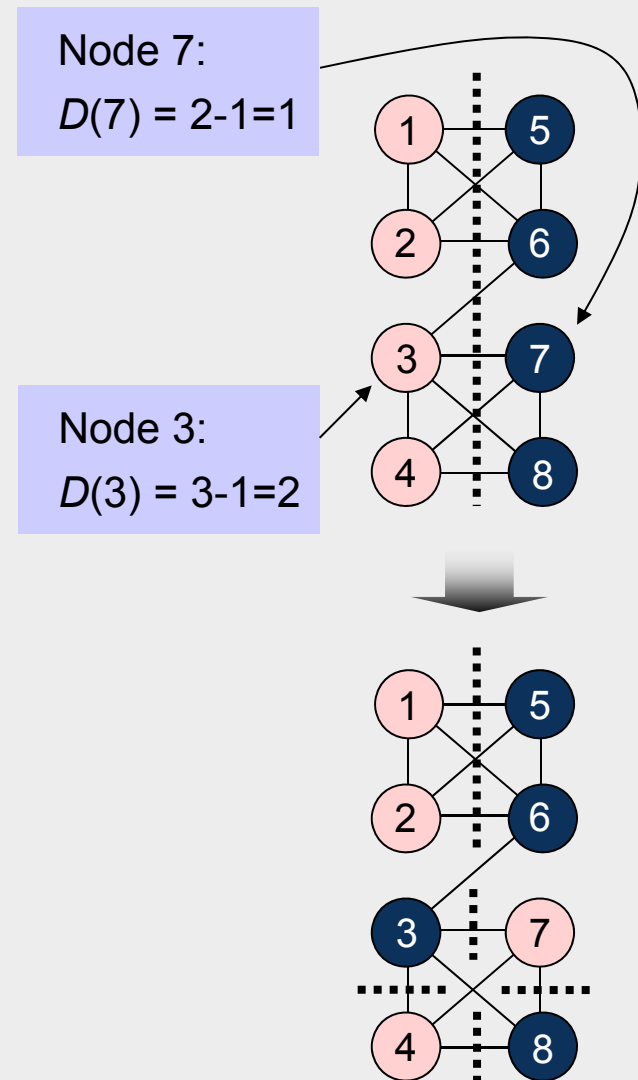
$$\Delta g = D(a) + D(b) - 2 * c(a,b),$$

где

- $D(a)$, $D(b)$ – это стоимости передвижения вершин a , b
- $c(a,b)$ – это вес соединения между a и b :
Если существует ребро между a и b ,
то $c(a,b)$ = вес ребра (например 1),
иначе, $c(a,b) = 0$.

$$\Delta g(3,7) = D(3) + D(7) - 2 * c(a,b) = 2 + 1 - 2 = 1$$

=> Обмен вершин 3 и 7 сократит разрез на 1 ребро



2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - терминология

Прирост связанный с обменом пары вершин a и b

$$\Delta g = D(a) + D(b) - 2 * c(a,b),$$

где

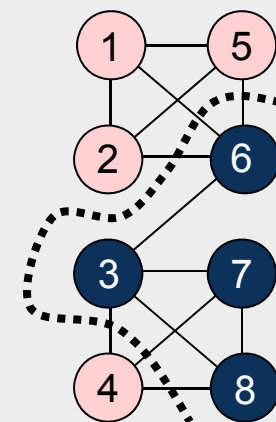
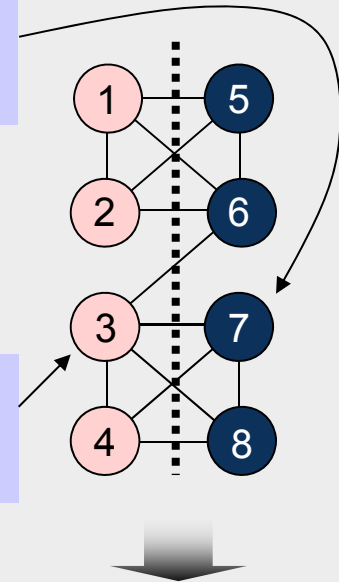
- $D(a)$, $D(b)$ – это стоимости передвижения вершин a , b
- $c(a,b)$ – это вес соединения между a и b :
Если существует ребро между a и b ,
то $c(a,b)$ = вес ребра (например 1),
иначе, $c(a,b) = 0$.

$$\Delta g(3,5) = D(3) + D(5) - 2 * c(a,b) = 2 + 1 - 0 = 3$$

=> Обмен вершин 3 и 5 сократит разрез на 3 ребра

Node 7:
 $D(7) = 2-1=1$

Node 3:
 $D(3) = 3-1=2$



2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - терминология

Прирост обмена пар вершин a и b

Ищем пары вершин a и b такие чтобы их обмен максимизировал Δg .

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - терминология

Максимальный положительный прирост G_m за проход

Максимальный положительный прирост G_m соответствует наилучшему префиксу m обменов, в последовательности обменов данного прохода.

Эти m обменов приводят к разбиению с наименьшим разрезом найденному за проход.

G_m вычисляется как сумма значений Δg за первые m обменов прохода; m выбирается так чтобы максимизировать G_m .

$$G_m = \sum_{i=1}^m \Delta g_i$$

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) – один проход

Шаг 0:

- $V = 2n$ вершин
- $\{A, B\}$ выбирается как произвольное изначальное разбиение

Шаг 1:

- $i = 1$
- Вычислить $D(v)$ для всех вершин $v \in V$

Шаг 2:

- Найти a_i и b_i так что $\Delta g_i = D(a_i) + D(b_i) - 2 * c(a_i, b_i)$ максимизировано
- Обменять a_i и b_i , зафиксировать эти вершины

Шаг 3:

- Если все вершины зафиксированы, то перейти на Шаг 4. Иначе
- Вычислить и обновить значения D для всех незафиксированных вершин не связанных с a_i и b_i .
- $i = i + 1$
- Перейти на Шаг 2

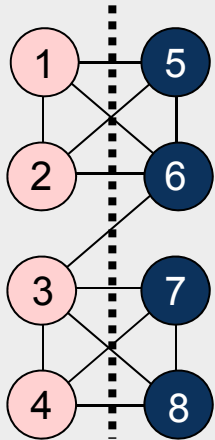
Шаг 4:

- Найти префикс прохода $1...m$ ($1 \leq m \leq i$), который максимизирует $G_m = \sum_{i=1}^m \Delta g_i$
- Если $G_m > 0$, то перейти на Шаг 5. Иначе, закончить алгоритм

Шаг 5:

- Выполнить m обменов, сбросить оставшиеся вершины
- Перейти на Шаг 1

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - пример

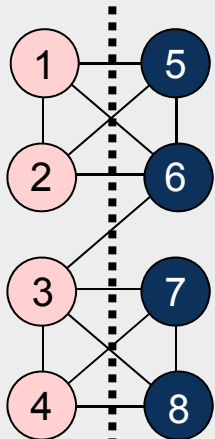


Разрез: 9

Не фиксированы:

1,2,3,4,5,6,7,8

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - пример



Разрез: 9

Не фиксированы:

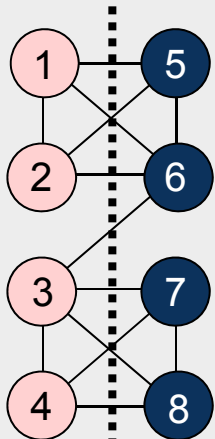
1,2,3,4,5,6,7,8

Стоимость $D(v)$ для каждой вершины:

$D(1) = 1$	$D(5) = 1$
$D(2) = 1$	$D(6) = 2$
$D(3) = 2$	$D(7) = 1$
$D(4) = 1$	$D(8) = 1$

Вершины ведущие к
максимальному приросту

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - пример



Разрез: 9
 Не фиксированы:
 1,2,3,4,5,6,7,8

Стоимость $D(v)$ для каждой вершины:

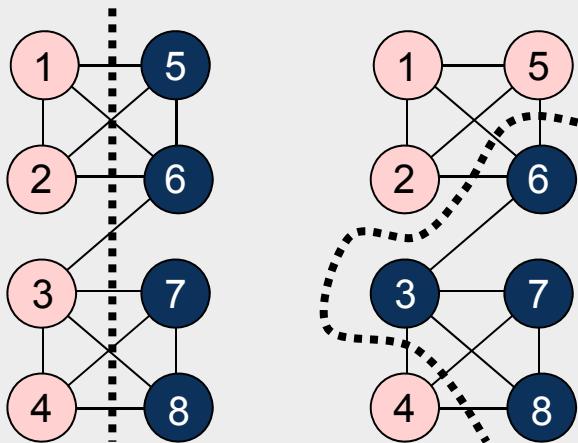
$D(1) = 1$	$D(5) = 1$	Вершины ведущие к максимальному приросту
$D(2) = 1$	$D(6) = 2$	
$D(3) = 2$	$D(7) = 1$	
$D(4) = 1$	$D(8) = 1$	

$\Delta g_1 = 2+1-0 = 3$ ← Прирост после обмена вершин

Обмен (3,5)

$G_1 = \Delta g_1 = 3$ ← Прирост в текущем проходе

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - пример



Разрез: 9

Не фиксированы:

1,2,3,4,5,6,7,8



$D(1) = 1$ $D(5) = 1$
 $D(2) = 1$ $D(6) = 2$
 $D(3) = 2$ $D(7) = 1$
 $D(4) = 1$ $D(8) = 1$

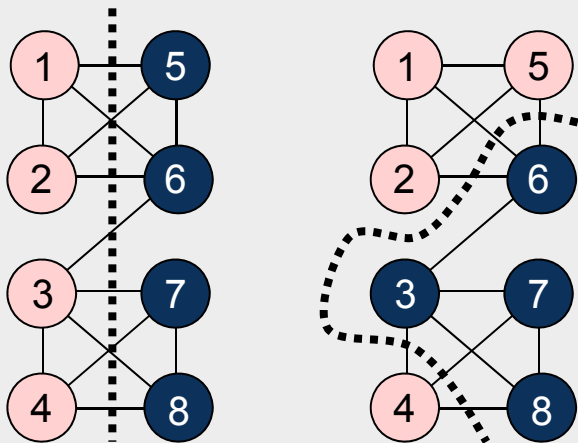
Вершины ведущие к
максимальному приросту

$\Delta g_1 = 2 + 1 - 0 = 3$ ← Прирост после обмена вершин

Обмен (3,5)

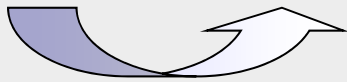
$G_1 = \Delta g_1 = 3$ ← Прирост в текущем проходе

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - пример



Разрез: 9
Не фиксированы:
1,2,3,4,5,6,7,8

Разрез: 6
Не фиксированы:
1,2,4,6,7,8



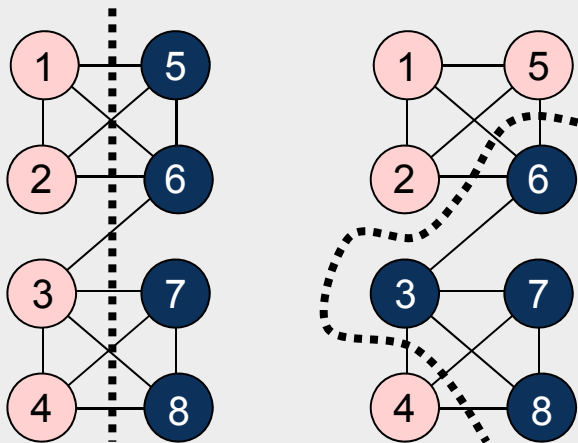
$D(1) = 1$ $D(5) = 1$
 $D(2) = 1$ $D(6) = 2$
 $D(3) = 2$ $D(7) = 1$
 $D(4) = 1$ $D(8) = 1$

$\Delta g_1 = 2 + 1 - 0 = 3$

Обмен (3,5)

$G_1 = \Delta g_1 = 3$

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - пример



Разрез: 9
Не фиксированы:
1,2,3,4,5,6,7,8

Разрез: 6
Не фиксированы:
1,2,4,6,7,8



$D(1) = 1$ $D(5) = 1$
 $D(2) = 1$ $D(6) = 2$
 $D(3) = 2$ $D(7) = 1$
 $D(4) = 1$ $D(8) = 1$

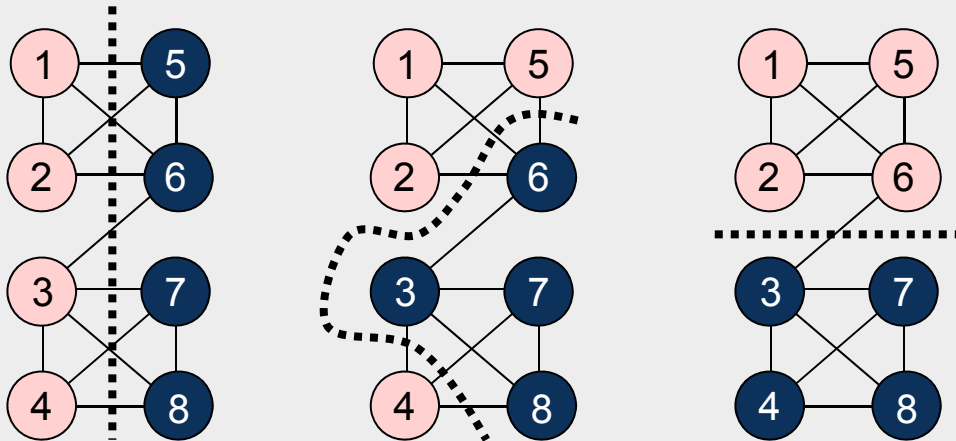
$$\Delta g_1 = 2 + 1 - 0 = 3$$

Обмен (3,5)

$$G_1 = \Delta g_1 = 3$$

$D(1) = -1$ $D(6) = 2$
 $D(2) = -1$ $D(7) = -1$
 $D(4) = 3$ $D(8) = -1$

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - пример



Разрез: 9
Не фиксированы:
1,2,3,4,5,6,7,8

Разрез: 6
Не фиксированы:
1,2,4,6,7,8



$D(1) = 1$ $D(5) = 1$
 $D(2) = 1$ $D(6) = 2$
 $D(3) = 2$ $D(7) = 1$
 $D(4) = 1$ $D(8) = 1$

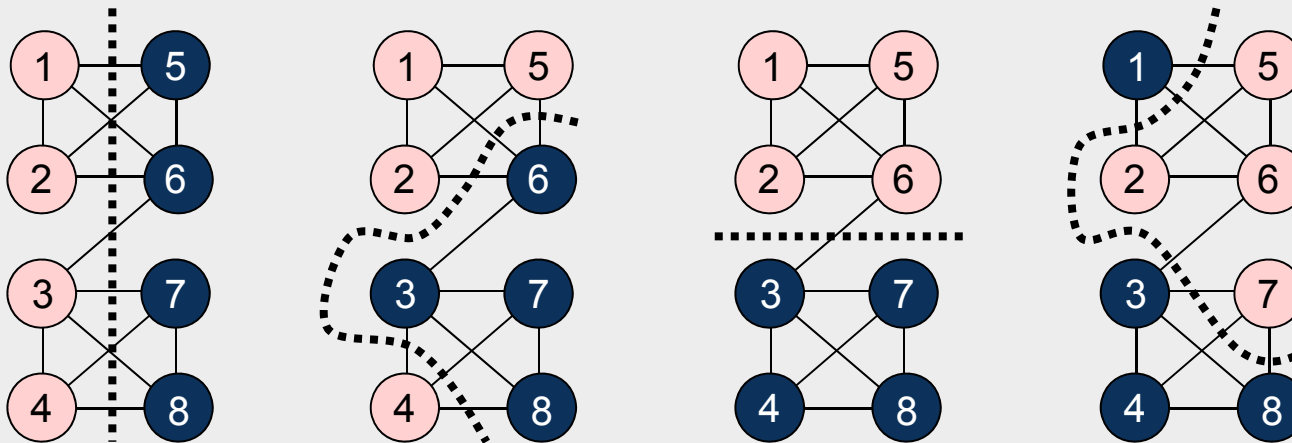
$\Delta g_1 = 2+1-0 = 3$
Обмен (3,5)
 $G_1 = \Delta g_1 = 3$

$D(1) = -1$ $D(6) = 2$
 $D(2) = -1$ $D(7) = -1$
 $D(4) = 3$ $D(8) = -1$

$\Delta g_2 = 3+2-0 = 5$ ← Прирост после обмена вершин
Обмен (4,6)
 $G_2 = G_1 + \Delta g_2 = 8$ ← Прирост в текущем проходе

Вершины ведущие к
максимальному приросту

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - пример

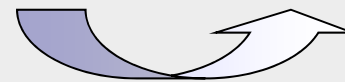


Разрез: 9
Не фиксированы:
1,2,3,4,5,6,7,8

Разрез: 6
Не фиксированы:
1,2,4,6,7,8

Разрез: 1
Не фиксированы:
1,2,7,8

Разрез: 7
Не фиксированы:
2,8



$D(1) = 1$ $D(5) = 1$
 $D(2) = 1$ $D(6) = 2$
 $D(3) = 2$ $D(7) = 1$
 $D(4) = 1$ $D(8) = 1$

$\Delta g_1 = 2+1-0 = 3$
Обмен (3,5)
 $G_1 = \Delta g_1 = 3$

$D(1) = -1$ $D(6) = 2$
 $D(2) = -1$ $D(7) = -1$
 $D(4) = 3$ $D(8) = -1$

$\Delta g_2 = 3+2-0 = 5$
Обмен (4,6)
 $G_2 = G_1 + \Delta g_2 = 8$

$D(1) = -3$ $D(7) = -3$
 $D(2) = -3$ $D(8) = -3$

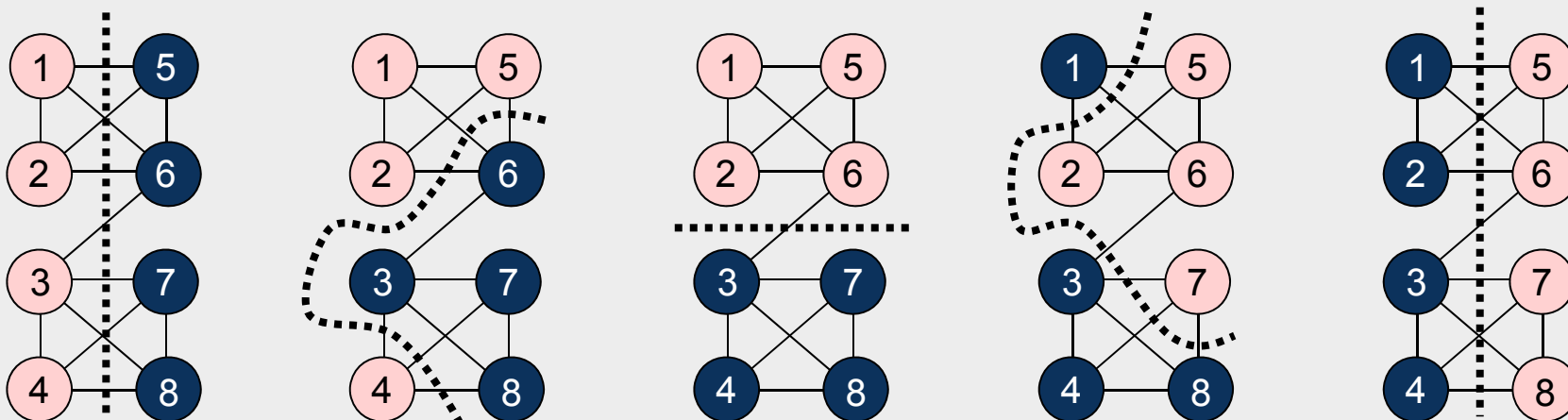
$\Delta g_3 = -3-3-0 = -6$
Обмен (1,7)
 $G_3 = G_2 + \Delta g_3 = 2$

Вершины ведущие к
максимальному приросту

Прирост после обмена вершин

Прирост в текущем проходе

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - пример



Разрез: 9
Не фиксированы:
1,2,3,4,5,6,7,8

Разрез: 6
Не фиксированы:
1,2,4,6,7,8

Разрез: 1
Не фиксированы:
1,2,7,8

Разрез: 7
Не фиксированы:
2,8

Разрез: 9
Не фиксированы:
-



$D(1) = 1$ $D(5) = 1$
 $D(2) = 1$ $D(6) = 2$
 $D(3) = 2$ $D(7) = 1$
 $D(4) = 1$ $D(8) = 1$

$\Delta g_1 = 2+1-0 = 3$
Обмен (3,5)
 $G_1 = \Delta g_1 = 3$

$D(1) = -1$ $D(6) = 2$
 $D(2) = -1$ $D(7) = -1$
 $D(4) = 3$ $D(8) = -1$

$\Delta g_2 = 3+2-0 = 5$
Обмен (4,6)
 $G_2 = G_1 + \Delta g_2 = 8$

$D(1) = -3$ $D(7) = -3$
 $D(2) = -3$ $D(8) = -3$

$\Delta g_3 = -3-3-0 = -6$
Обмен (1,7)
 $G_3 = G_2 + \Delta g_3 = 2$

$D(2) = -1$ $D(8) = -1$

$\Delta g_4 = -1-1-0 = -2$
Обмен (2,8)
 $G_4 = G_3 + \Delta g_4 = 0$

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - пример

$$\begin{array}{ll} D(1) = 1 & D(5) = 1 \\ D(2) = 1 & D(6) = 2 \\ D(3) = 2 & D(7) = 1 \\ D(4) = 1 & D(8) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_1 = 2+1-0 = 3 \\ \text{Обмен (3,5)} \\ G_1 = \Delta g_1 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D(1) = -1 & D(6) = 2 \\ D(2) = -1 & D(7) = -1 \\ D(4) = 3 & D(8) = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_2 = 3+2-0 = 5 \\ \text{Обмен (4,8)} \\ G_2 = G_1 + \Delta g_2 = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D(1) = -3 & D(7) = -3 \\ D(2) = -3 & D(8) = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_3 = -3-3-0 = -6 \\ \text{Обмен (1,7)} \\ G_3 = G_2 + \Delta g_3 = 2 \end{array}$$

$$D(2) = -1 \quad D(8) = -1$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_4 = -1-1-0 = -2 \\ \text{Обмен (2,8)} \\ G_4 = G_3 + \Delta g_4 = 0 \end{array}$$

Максимальный положительный прирост $G_m = 8$ при $m = 2$.

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL) - пример

$$\begin{array}{ll} D(1) = 1 & D(5) = 1 \\ D(2) = 1 & D(6) = 2 \\ D(3) = 2 & D(7) = 1 \\ D(4) = 1 & D(8) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_1 = 2+1-0 = 3 \\ \text{Swap (3,5)} \\ G_1 = \Delta g_1 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D(1) = -1 & D(6) = 2 \\ D(2) = -1 & D(7) = -1 \\ D(4) = 3 & D(8) = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_2 = 3+2-0 = 5 \\ \text{Swap (4,6)} \\ G_2 = G_1 + \Delta g_2 = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D(1) = -3 & D(7) = -3 \\ D(2) = -3 & D(8) = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_3 = -3-3-0 = -6 \\ \text{Swap (1,7)} \\ G_3 = G_2 + \Delta g_3 = 2 \end{array}$$

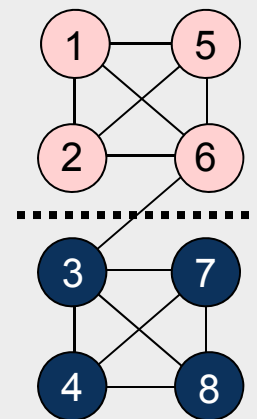
$$D(2) = -1 \quad D(8) = -1$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_4 = -1-1-0 = -2 \\ \text{Swap (2,8)} \\ G_4 = G_3 + \Delta g_4 = 0 \end{array}$$

Максимальный положительный прирост $G_m = 8$ при $m = 2$.

Поскольку $G_m > 0$, выполняются первые $m = 2$ обмена (3,5) и (4,6).

Пока $G_m > 0$, проходы продолжаются .



2.4.2 Улучшенные варианты алгоритма Кернигана-Лина (KL)

- Компоненты неравного размера
 - На каждом проходе алгоритма KL выполняются только $\min(|A|, |B|)$ обмена
- Неравные площади вершин
 - Постараться умножить/поделить все площади на константу, чтобы получить малые целые числа, например $2x$, $3x$ наименьших общих делителя всех площадей
 - Поддерживать баланс площади, возможно разрешая отклонение на одну вершину
- Разбиение на k компонент
 - Применить двух-компонентный KL ко всем парам компонент
 - Рекурсивное разбиение (особенно удобно когда k является степенью двойки)
 - Существуют алгоритмы для разбиения на k компонент напрямую

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM)

- Ячейки передвигаются по одной вместо обмена пар --- при этом невозможно и не нужно поддерживать компоненты равного размера
 - Учитывается площадь каждой ячейки
 - Продолжает работать в случае компонент разного размера, а также фиксированных ячеек
- Понятие разреза расширено чтобы учитывать гиперграфы
 - сети с 2+ контактами
- В то время как алгоритм KL уменьшает разрезы по рёбрам, алгоритм FM уменьшает разрезы по сетям (гипер-рёбрам)
- Вершины и подграфы переименованы в *ячейки* и *блоки*, соответственно

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM)

Дается: гиперграф $G(V, H)$ с вершинами и *взвешенными* гипер-рёбрами, ограничения на размер компонент

Требуется: распределить все вершины в непересекающиеся компоненты, так чтобы минимизировать общую стоимость (вес) разрезанных сетей, выполнив *ограничения на размер компонент*

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – терминология

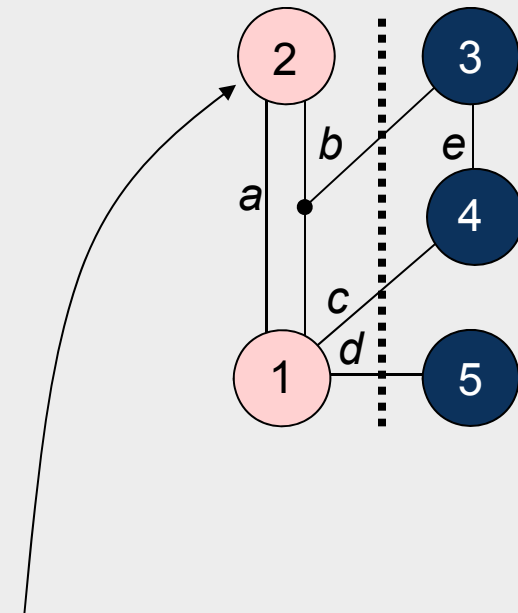
Прирост $\Delta g(c)$ для ячейки c

$$\Delta g(c) = FS(c) - TE(c),$$

где

“движущая сила” $FS(c)$ это количество сетей связанных с c но не связанных с другими ячейками компоненты c , т.е., разрезанных сетей связанных только с c ,

“сила удержания” $TE(c)$ это количество *неразрезанных* сетей связанных с c .



Ячейка 2: $FS(2) = 0$

$TE(2) = 1$ $\Delta g(2) = -1$

Чем выше прирост $\Delta g(c)$, тем выше приоритет для передвижения ячейки c в другую компоненту.

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – терминология

Прирост $\Delta g(c)$ для ячейки c

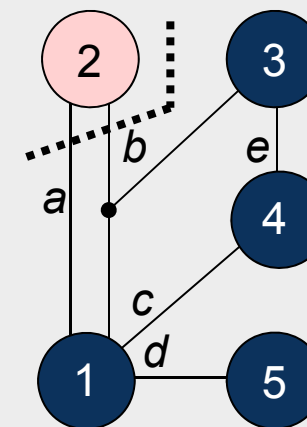
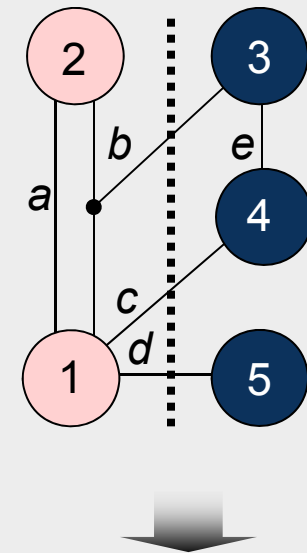
$$\Delta g(c) = FS(c) - TE(c),$$

где

“движущая сила” $FS(c)$ это количество сетей связанных с c но не связанных с другими ячейками компоненты c , т.е., разрезанных сетей связанных только с c ,

“сила удержания” $TE(c)$ это количество *неразрезанных* сетей связанных с c .

Cell 1:	$FS(1) = 2$	$TE(1) = 1$	$\Delta g(1) = 1$
Cell 2:	$FS(2) = 0$	$TE(2) = 1$	$\Delta g(2) = -1$
Cell 3:	$FS(3) = 1$	$TE(3) = 1$	$\Delta g(3) = 0$
Cell 4:	$FS(4) = 1$	$TE(4) = 1$	$\Delta g(4) = 0$
Cell 5:	$FS(5) = 1$	$TE(5) = 0$	$\Delta g(5) = 1$



2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – терминология

Максимальный положительный прирост G_m в течении прохода

Максимальный положительный прирост G_m это общий прирост m шагов ведущих к минимальному разрезу.

G_m определяется как максимальная сумма приростов ячеек Δg за префикс прохода состоящий из m шагов

$$G_m = \sum_{i=1}^m \Delta g_i$$

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – терминология

Фактор баланса

Частное размеров (сумм площадей ячеек) двух компонент

Используется чтобы не допустить назначение всех ячеек в одну компоненту

Определяется по формуле

$$r = \frac{area(A)}{area(A) + area(B)}$$

где $area(A)$ и $area(B)$ - это суммы площадей компонент A и B

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – терминология

Критерий баланса

Близок к фактору баланса

Дополнительно учитывает максимальную площадь ячейки $area_{max}(V)$

Разбиение V на компоненты A и B считается сбалансированным если

$$[r \cdot area(V) - area_{max}(V)] \leq area(A) \leq [r \cdot area(V) + area_{max}(V)]$$

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – терминология

Базовая ячейка

Базовая ячейка c обладает наибольшим приростом $\Delta g(c)$ среди всех незафиксированных ячеек таких что их можно передвинуть не нарушив критерий баланса.

Базовая ячейка



The diagram shows a table with four rows representing different cells. An arrow points from the text 'Базовая ячейка' above to the first row of the table. The first row is circled in red, and the value $\Delta g(1) = 1$ in that row is also circled in red.

Cell 1:	$FS(1) = 2$	$TE(1) = 1$	$\Delta g(1) = 1$
Cell 2:	$FS(2) = 0$	$TE(2) = 1$	$\Delta g(2) = -1$
Cell 3:	$FS(3) = 1$	$TE(3) = 1$	$\Delta g(3) = 0$
Cell 4:	$FS(4) = 1$	$TE(4) = 1$	$\Delta g(4) = 0$

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – один проход

Шаг 0: Оценить критерий баланса

Шаг 1: Вычислить прирост Δg_1 каждой ячейки

Шаг 2: $i = 1$

– Выбрать базовую ячейку c_1 с максимальным приростом Δg_1 , передвинуть эту ячейку

Шаг 3:

– Зафиксировать базовую ячейку c_i

– Обновить приросты всех ячеек связанных с базовой ячейкой через критические сети

Шаг 4:

– Если все ячейки зафиксированы, перейти на Шаг 5. Иначе:

– Выбрать следующую базовую ячейку c_i с максимальным приростом Δg_i , передвинуть c_i

– $i = i + 1$, перейти на Шаг 3

Шаг 5:

– Определить лучший префикс c_1, c_2, \dots, c_m ($1 \leq m \leq i$), чтобы максимизировать $G_m = \sum_{i=1}^m \Delta g_i$

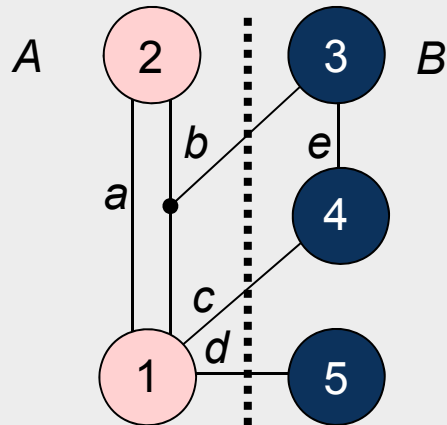
– Если $G_m > 0$, перейти на Шаг 6. Иначе, закончить алгоритм

Шаг 6:

– Выполнить m шагов, сбросить все фиксированные ячейки

– Начать новый проход, перейти на Шаг 1

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – пример



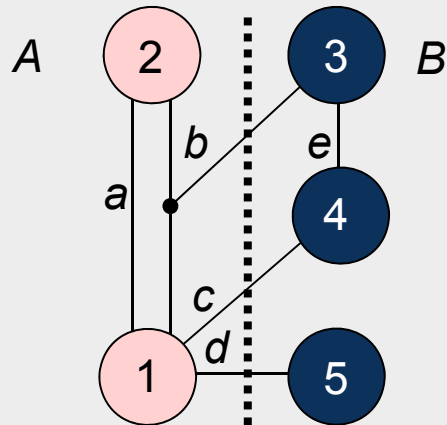
Исходные данные:
Фактор баланса $r = 0,375$
 $area(\text{Cell}_1) = 2$
 $area(\text{Cell}_2) = 4$
 $area(\text{Cell}_3) = 1$
 $area(\text{Cell}_4) = 4$
 $area(\text{Cell}_5) = 5.$

Шаг 0: Оценить критерий баланса

$$[r \cdot area(V) - area_{max}(V)] \leq area(A) \leq [r \cdot area(V) + area_{max}(V)]$$

$$0,375 * 16 - 5 = 1 \leq area(A) \leq 11 = 0,375 * 16 + 5.$$

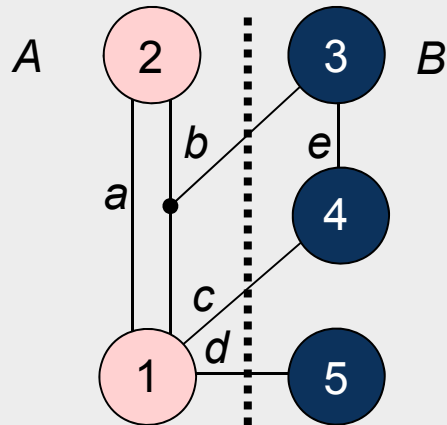
2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – пример



Шаг 1: Вычислить прирост каждой ячейки

Cell 1:	$FS(\text{Cell}_1) = 2$	$TE(\text{Cell}_1) = 1$	$\Delta g(\text{Cell}_1) = 1$
Cell 2:	$FS(\text{Cell}_2) = 0$	$TE(\text{Cell}_2) = 1$	$\Delta g(\text{Cell}_2) = -1$
Cell 3:	$FS(\text{Cell}_3) = 1$	$TE(\text{Cell}_3) = 1$	$\Delta g(\text{Cell}_3) = 0$
Cell 4:	$FS(\text{Cell}_4) = 1$	$TE(\text{Cell}_4) = 1$	$\Delta g(\text{Cell}_4) = 0$
Cell 5:	$FS(\text{Cell}_5) = 1$	$TE(\text{Cell}_5) = 0$	$\Delta g(\text{Cell}_5) = 1$

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – пример



Cell 1:	$FS(\text{Cell}_1) = 2$	$TE(\text{Cell}_1) = 1$	$\Delta g(\text{Cell}_1) = 1$
Cell 2:	$FS(\text{Cell}_2) = 0$	$TE(\text{Cell}_2) = 1$	$\Delta g(\text{Cell}_2) = -1$
Cell 3:	$FS(\text{Cell}_3) = 1$	$TE(\text{Cell}_3) = 1$	$\Delta g(\text{Cell}_3) = 0$
Cell 4:	$FS(\text{Cell}_4) = 1$	$TE(\text{Cell}_4) = 1$	$\Delta g(\text{Cell}_4) = 0$
Cell 5:	$FS(\text{Cell}_5) = 1$	$TE(\text{Cell}_5) = 0$	$\Delta g(\text{Cell}_5) = 1$

Шаг 2: Найти базовую ячейку

Возможные базовые ячейки Cell 1 и Cell 5

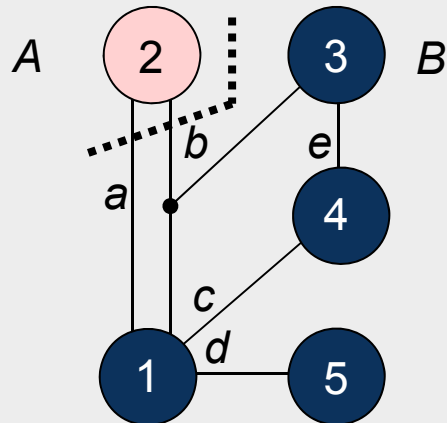
Критерий баланса после передвижения Cell 1: $area(A) = area(\text{Cell}_2) = 4$

Критерий баланса после передвижения Cell 5:

$$area(A) = area(\text{Cell}_1) + area(\text{Cell}_2) + area(\text{Cell}_5) = 11$$

В обоих случаях критерий баланса соблюден, но мы выбираем и передвигаем Cell 1

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – пример

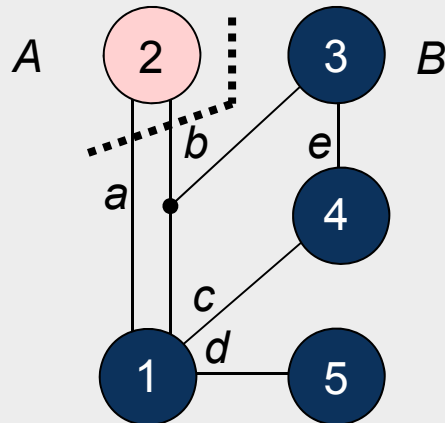


Шаг 3: Зафиксировать базовую ячейку, обновить приросты Δg

Cell 2:	$FS(\text{Cell_2}) = 2$	$TE(\text{Cell_2}) = 0$	$\Delta g(\text{Cell_2}) = 2$
Cell 3:	$FS(\text{Cell_3}) = 0$	$TE(\text{Cell_3}) = 1$	$\Delta g(\text{Cell_3}) = -1$
Cell 4:	$FS(\text{Cell_4}) = 0$	$TE(\text{Cell_4}) = 2$	$\Delta g(\text{Cell_4}) = -2$
Cell 5:	$FS(\text{Cell_5}) = 0$	$TE(\text{Cell_5}) = 1$	$\Delta g(\text{Cell_5}) = -1$

После итерации $i = 1$: Компонента $A_1 = \{2\}$, Компонент $B_1 = \{1,3,4,5\}$, ячейка $\{1\}$ фиксирована.

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – пример



Итерация $i = 1$

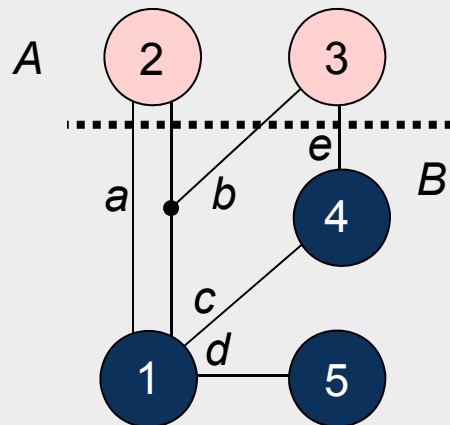
Cell 2:	$FS(\text{Cell}_2) = 2$	$TE(\text{Cell}_2) = 0$	$\Delta g(\text{Cell}_2) = 2$
Cell 3:	$FS(\text{Cell}_3) = 0$	$TE(\text{Cell}_3) = 1$	$\Delta g(\text{Cell}_3) = -1$
Cell 4:	$FS(\text{Cell}_4) = 0$	$TE(\text{Cell}_4) = 2$	$\Delta g(\text{Cell}_4) = -2$
Cell 5:	$FS(\text{Cell}_5) = 0$	$TE(\text{Cell}_5) = 1$	$\Delta g(\text{Cell}_5) = -1$

Итерация $i = 2$

Cell 2 с максимальным приростом $\Delta g_2 = 2$, $area(A) = 0$, критерий баланса не соблюден
 Cell 3 со следующим приростом $\Delta g_2 = -1$, $area(A) = 5$, критерий баланса не соблюден.
 Cell 5 со следующим приростом $\Delta g_2 = -1$, $area(A) = 9$, критерий баланса не соблюден.

Передвигаем Cell 3; компоненты: $A_2 = \{2,3\}$, $B_2 = \{1,4,5\}$, фиксированные ячейки: $\{1,3\}$

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – пример



Итерация $i = 2$

Cell 2: $\Delta g(\text{Cell}_2) = 1$

Cell 4: $\Delta g(\text{Cell}_4) = 0$

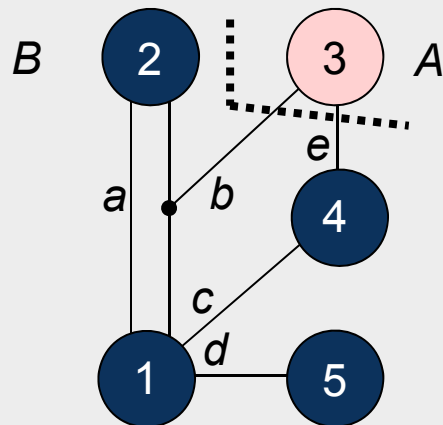
Cell 5: $\Delta g(\text{Cell}_5) = -1$

Итерация $i = 3$

Cell 2 с максимальным приростом $\Delta g_3 = 1$, $area(A) = 1$, критерий баланса соблюден

Передвигаем cell 2, компоненты: $A_3 = \{3\}$, $B_3 = \{1,2,4,5\}$, фиксированные ячейки: $\{1,2,3\}$

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – пример



Итерация $i = 3$

Cell 4: $\Delta g(\text{Cell}_4) = 0$

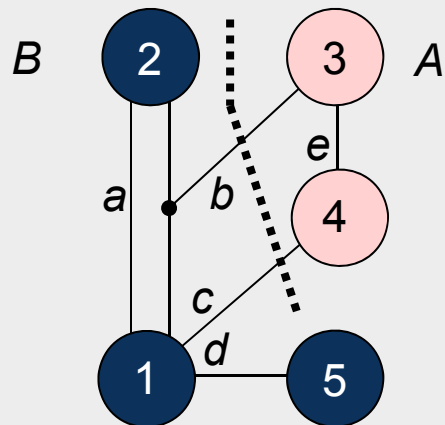
Cell 5: $\Delta g(\text{Cell}_5) = -1$

Итерация $i = 4$

Cell 4 с максимальным приростом $\Delta g_4 = 0$, $area(A) = 5$, критерий баланса соблюден.

Передвигаем cell 4, компоненты: $A_4 = \{3,4\}$, $B_3 = \{1,2,5\}$, фиксированные ячейки $\{1,2,3,4\}$

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – пример



Итерация $i = 4$

Cell 5: $\Delta g(\text{Cell}_5) = -1$

Итерация $i = 5$

Cell 5 с максимальным приростом $\Delta g_5 = -1$, $area(A) = 10$, критерий баланса соблюден.

Передвигаем cell 5; компоненты $A_4 = \{3,4,5\}$, $B_3 = \{1,2\}$,

все ячейки $\{1,2,3,4,5\}$ зафиксированы.

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM) – пример

Шаг 5: Найти лучший префикс прохода $c_1 \dots c_m$

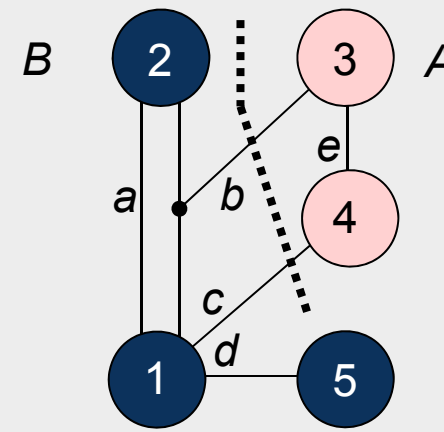
$$G_1 = \Delta g_1 = 1$$

$$G_2 = \Delta g_1 + \Delta g_2 = 0$$

$$G_3 = \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 = 1$$

$$G_4 = \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 + \Delta g_4 = 1$$

$$G_5 = \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 + \Delta g_4 + \Delta g_5 = 0.$$



Максимальный суммарный прирост найден in итерациях 1, 3 and 4.

$$G_m = \sum_{i=1}^m \Delta g_i = 1$$

Выбран префикс $m = 4$ благодаря лучшему фактору баланса ($area(A) = 5$);
Передвигаем четыре ячейки 1, 2, 3 and 4.

Результат Прохода 1: Компоненты: $A = \{3,4\}$, $B = \{1,2,5\}$, разрез сокращён с 3 до 2.

Разница во времени работы KL и FM

- Время работы алгоритмов разбиения
 - для KL важно количество вершин и рёбер
 - для FM важно количество вершин и сетей (гипер-рёбер), а также размеры гипер-рёбер (количество контактов)
- Асимптотическая сложность алгоритмов разбиения
 - сложность одного прохода KL *кубическая*
 - сложность одного прохода FM *линейная*

2.5 Многоуровневые алгоритмы разбиения графов

2.1 Введение

2.2 Терминология


2.3 Задачи оптимизации

2.4 Алгоритмы разбиение (гипер)графов

2.4.1 Алгоритм Кернигана-Лина (KL)

2.4.2 Улучшенные варианты алгоритма Кернигана-Лина

2.4.3 Алгоритм Фидуччи-Маттейсеса (FM)

 2.5 Многоуровневые алгоритмы

2.5.1 Кластеризация

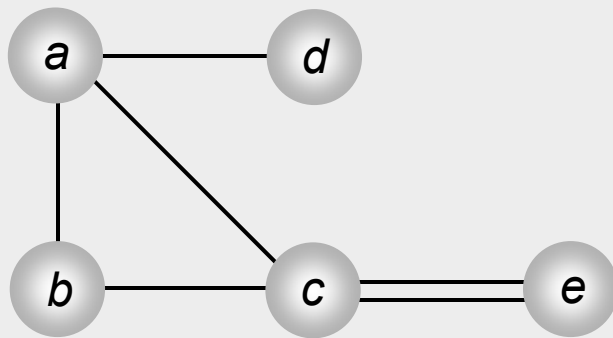
2.5.2 Многоуровневое разбиение (гипер)графов

2.6 Разбиение систем на несколько кристаллов ПЛИС для эмуляции

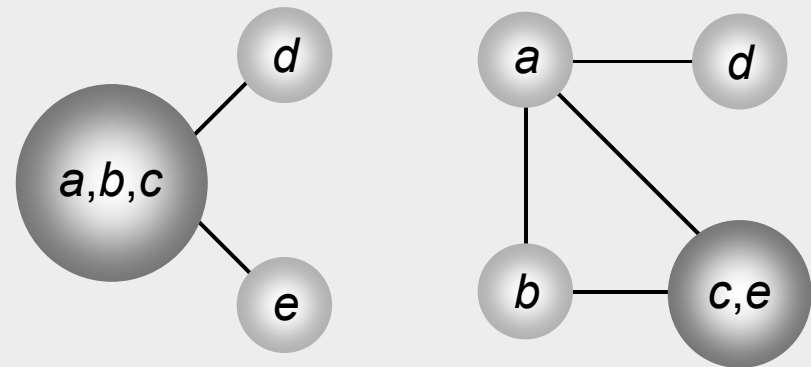
2.5.1 Кластеризация

- Чтобы упростить задачу, группы тесно связанных вершин можно объединить в кластеры, поглотив соединения между ними
- Размер каждого кластера обычно ограничен чтобы предотвратить вырожденную иерархию, т.е. один large кластер гораздо больше остальных
- Уточнение кластеров (refinement) должно соблюдать критерии баланса

2.5.1 Кластеризация

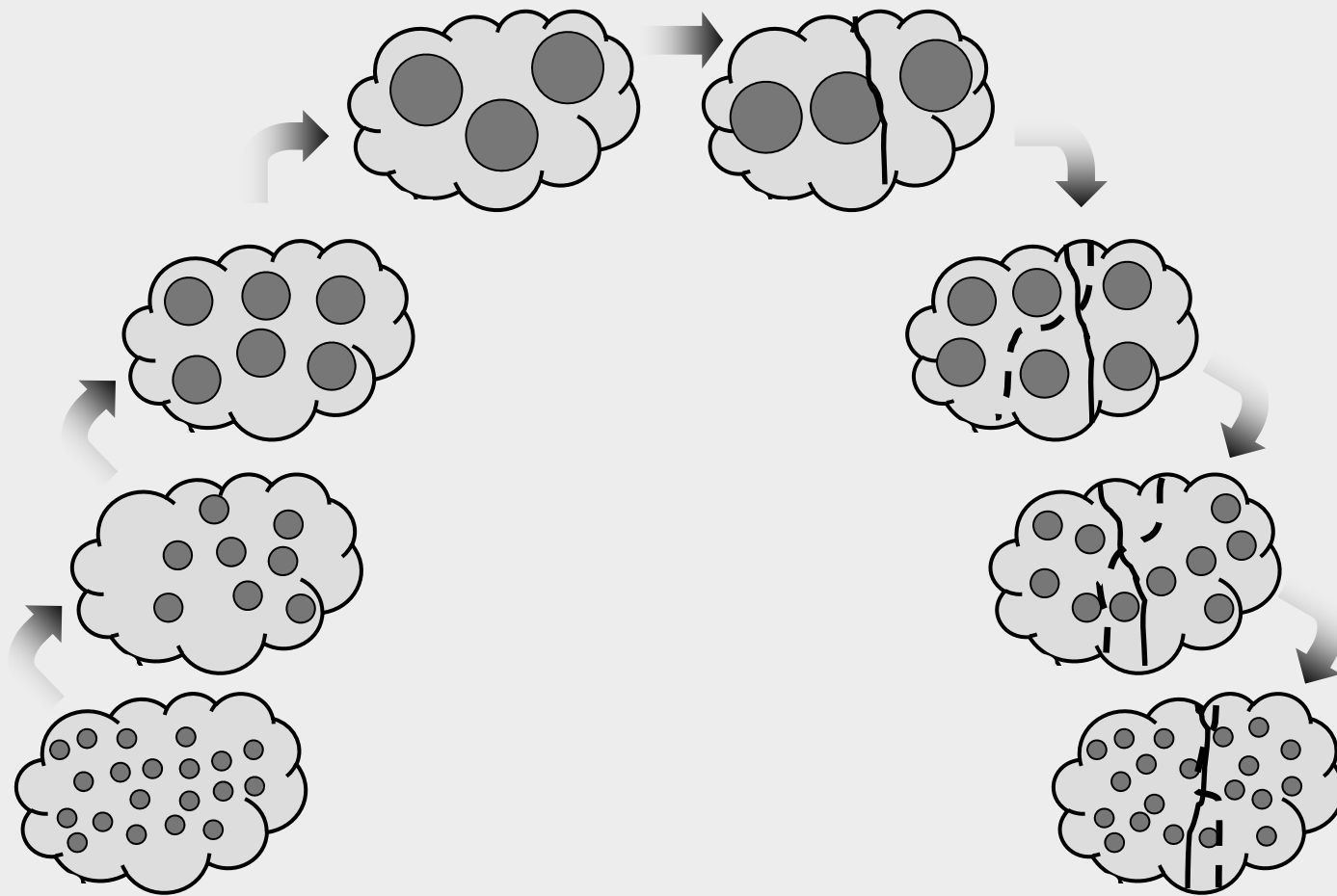


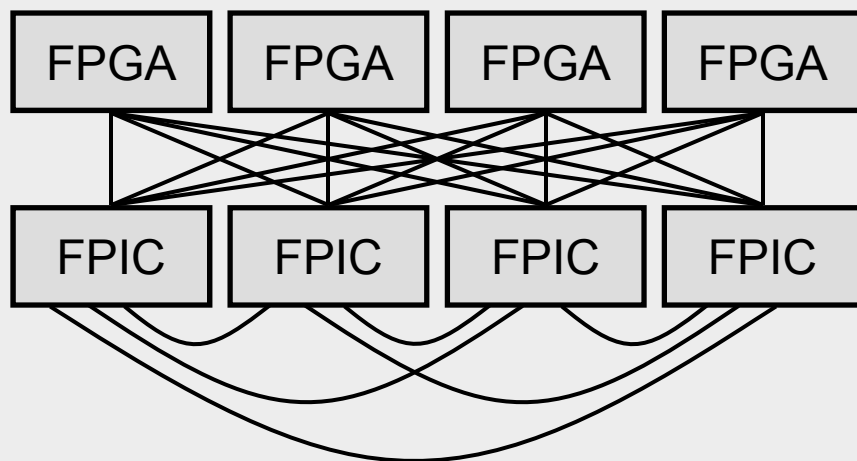
Начальный граф



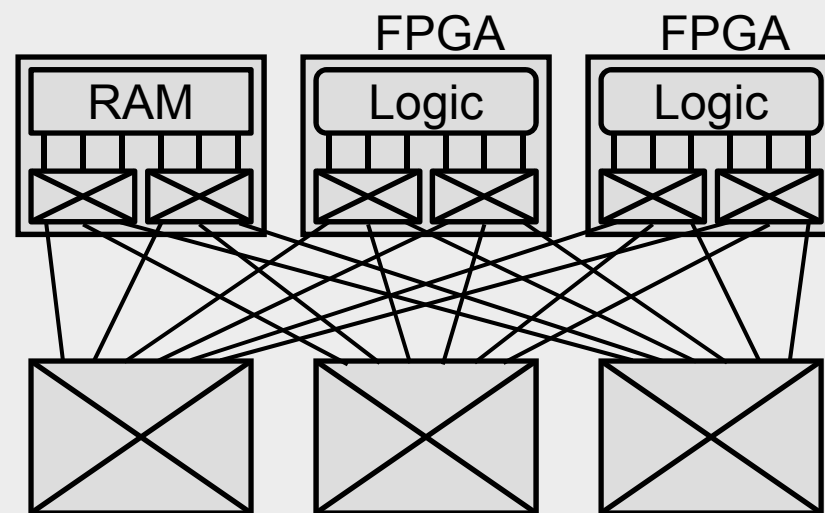
Две возможные иерархии графа

2.5.2 Многоуровневое разбиение





Система с реконфигурацией состоящая из нескольких кристаллов ПЛИС (FPGA)



Отображение архитектуры системы на несколько кристаллов ПЛИС

Обзор Главы 2

- Представление схем графами и гиперграфами
- Разбиения графа: распределение вершин по непересекающимся компонентам
 - Размер каждой компоненты (число/площадь вершин) ограничен
 - Требуется: минимизировать количество соединений между компонентами
- Основные алгоритмы разбиения
 - Пошаговые/итеративные методы; шаги собаны в проходы
 - KL переставляет пары вершин из разных компонент
 - FM передвигает вершины по одной
 - FM работает быстрее, обычно получает лучшие результаты
- Многоуровневое разбиение
 - Кластеризация
 - На самом дальнем уровне - используем FM, начиная со случайного разбиения
 - Уточнение кластеров на каждом уровне – также используем FM
- Приложение: разбиение систем на кристаллы ПЛИС для эмуляции
 - Каждый кристалл ПЛИС представлен компонентой разбиения